

Subiectul I – Secțiunea C

- a) Raza de convergență2p
Convergență pe $(-2,2)$1p
Convergență în 2 și -2.....1p
- b) **Metoda I:**
Formula Taylor.....0,5p
Calculul derivate.....1p
Derivata de ordinul n1p
Dezvoltarea funcției f1,5p
- Metoda II:**
Formula dezvoltării funcției $\ln(1-x)$0,5p
Adaptarea formulei la expresiile aparute.....3p
Dezvoltarea funcției f0,5p
- Metoda III:**
Dezvoltarea funcției $\frac{1}{1-x^2}$0,5p
Integrarea3p
Determinarea constantei de integrare.....0,5p
- c) $S(1) = f(1) = \ln 3$2p

Concursul national studentesc Traian Lalescu, Sibiu, 2016

BAREM Subiectul 2 – Sectiunea C

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{-x^{2016}} = 1$

$$0 \leq \left| \frac{x^{2015} + y^{2015}}{x^{1008} + y^{1008}} \right| \leq \left| \frac{x^{2015}}{x^{1008} + y^{1008}} \right| + \left| \frac{y^{2015}}{x^{1008} + y^{1008}} \right| \leq \left| \frac{x^{2015}}{x^{1008}} \right| + \left| \frac{y^{2015}}{y^{1008}} \right| = |x^{1007}| + |y^{1007}|$$

de unde $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^{2015} + y^{2015}}{x^{1008} + y^{1008}} = 0$ și $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ 2p

b) definitia diferentiabilitatii 1p

calculul derivatelor partiale in origine =00,5p

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ 1,5p

c) $x^{2015} + y^{2015} = (x + y)(x^{2014} - x^{2013}y + \dots + x^{1008}y^{1006} - x^{1007}y^{1007} + x^{1006}y^{1008} - \dots + y^{2014})$

Rezultă

$$0 \leq \left| \frac{x^{2015} + y^{2015}}{(x + y)(x^{1008} + y^{1008})} \right| = \left| \frac{x^{1008}(x^{1006} - x^{1005}y + \dots + y^{1006}) - x^{1007}y^{1007} + y^{1008}(x^{1006} - x^{1005}y + \dots + y^{1006})}{x^{1008} + y^{1008}} \right|$$

$$\leq \left| \frac{x^{1008}(x^{1006} - x^{1005}y + \dots + y^{1006})}{x^{1008} + y^{1008}} \right| + \left| \frac{x^{1007}y^{1007}}{x^{1008} + y^{1008}} \right| + \left| \frac{y^{1008}(x^{1006} - x^{1005}y + \dots + y^{1006})}{x^{1008} + y^{1008}} \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{x^{1008}(x^{1006} - x^{1005}y + \dots + y^{1006})}{x^{1008}} \right| + \left| \frac{x^{1007}y^{1007}}{2\sqrt{x^{1008} \cdot y^{1008}}} \right| + \left| \frac{y^{1008}(x^{1006} - x^{1005}y + \dots + y^{1006})}{y^{1008}} \right|$$

de unde $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^{2015} + y^{2015}}{(x+y)(x^{1008} + y^{1008})} = 0$ și $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x+y} = 0$ 3p

d) $f(x, x) = x^{1007} \cdot e^{-x^{2016}}$. Cu substituția $x^{2016} = u$ 1p

integrala devine $I = \frac{1}{2016} \int_0^\infty u^{-1/2} e^{-u} du$, adică $I = \frac{1}{2016} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2016}$ 1p

Concursul național studențesc Traian Lalescu, Sibiu 2016

BAREM Subiectul 3 – secțiunea C

a) Distanța de la origine la planul $(\pi) = 3$0,5p

Discuție (planul este exterior sferei).....0,5p

1punct

b) Perpendiculara pe $(\pi) \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$0,5p

Proiecția originii pe planul (π) $I(2,2,1)$1p

Simetricul originii față de (π) $C(4,4,2)$0,5p

Ecuția sferei căutate $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 + (z - 2)^2 - 9 = 0$1p

3 puncte

c) Sferele care conțin cercul $x^2 + y^2 + (z - \alpha)^2 = \alpha^2 + 4$ 1p

Punctele de tangență cu (S) $A(0,0,1), B(0,0 - 1)$1p

Determinarea lui α și scrierea sferelor căutate $\alpha = \pm \frac{3}{2}, x^2 + y^2 + (z \pm \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$1p

3 puncte

d) Perpendiculara pe $(d) \frac{x-a}{2} = \frac{y-b}{2} = \frac{z-c}{1}$0,5p

Condiția de tangență cu sfera (S) 1p

Distanța de la origine la (d) $(b - 2c)^2 + (2c - a)^2 + 4(a - b)^2 = 9$0,5p

Ecuția cilindrului $(y - 2z)^2 + (2z - x)^2 + 4(x - y)^2 = 9$ 0,5p

Ecuția conicei $5x^2 + 5y^2 - 8xy - 9 = 0$0,5p

$\delta = 9 > 0, I\Delta < 0$ elipsă.....0,5p

3 puncte

Subiectul IV- Sectiunea C

- a) Calculul $f(E_{ij})$2p
- b) Relatia de legatura intre matricele in baze diferite.....1p
Matricea de trecere; inversa.....0,5p
Finalizarea calculelor.....0,5p
- c) Nucleul $\text{Ker}T = \{0\}$1p
Imaginea $\text{Im}T = M_2(\mathbb{R})$0,5p
Relatia intre dimensiuni.....0,5p
- d) Valorile proprii $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 5, \lambda_4 = -1$ 1p
Vectorii proprii.....1p
- e) Matricea este diagonalizabila – justificare.....0,5p
 D, C si relatia $T = CDC^{-1}$ 0,5p
 $T^{2016} = CD^{2016}C^{-1}$ 0,5p
Calculul matricei cautate; raspuns: $\begin{pmatrix} 5^{2016} & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ 0,5p